

Problem Set 18: 群论导引

提交截止时间：4 月 29 日 10:00

Problem 1

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群, 么半群和群:

- (1) a 是正实数, $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, 运算是普通乘法.
- (2) \mathbb{Q}^+ 为正有理数, 运算是普通乘法.
- (3) \mathbb{Q}^+ 为正有理数, 运算是普通加法.
- (4) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法.
- (5) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法.
- (6) $U_n = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^n = 1\}$, n 为某个给定正整数, \mathbb{C} 为复数集合, 运算是复数乘法.

注: (4) (5) 两小题中, 形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 只有 x 一个变元, 系数均为实数的多项式, 叫做一元实系数多项式.

Problem 2

$S = \{a, b, c\}$, $*$ 是 S 上的二元运算, 且 $\forall x, y \in S, x * y = x$.

- (1) 证明 S 关于 $*$ 运算构成半群.
- (2) 试判断 S 成为么半群的条件.

Problem 3

证明: 有单位元且满足消去律的有限半群一定是群.

Problem 4

设 G 是一个群, 并且 $|G|$ 为偶数, 证明 G 中必定存在一个元素 g 满足 $g \neq e$ 且 $g = g^{-1}$.

Problem 5

证明: 设 a 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的幂等元, 则 a 一定是单位元. (注: a 为群 $\langle G, \circ \rangle$ 的幂等元指 $a \circ a = a$.)

Problem 6

(结合律) 假定集合 S 上定义的二元操作 \circ 满足结合律. 我们知道二元操作只定义在两个元素上, 当参与运算的元素超过两个时, 会有很多种不同的顺序, 比如: 假定 $a, b, c, d \in S$, 那么可能会有情况有:

$$(a \circ b) \circ (c \circ d), (a \circ (b \circ c)) \circ d, a \circ ((b \circ c) \circ d)$$

等等, 注意到**每一步只进行一次运算**. 证明: 无论我们怎么放置括号, 这种嵌套运算的最终结果是不变的. 即证明对 $s_1 s_2 \dots s_n \in S$, 任意括号嵌套顺序下的结果都等同于 $((\dots((s_1 \circ s_2) \circ s_3) \dots) \circ s_n)$.

(提示: 使用数学归纳法, 基础情况是 $n = 2$, 手动尝试一下从 $n = 4$ 到 $n = 5$ 的情况).

Problem 7

(数论) 我们知道, 在整数集合 \mathbb{Z} 上的同余关系是一个等价关系. 我们用记号 $[a]_n$ 表示 a 的模 n 同余类. 即:

$$b \in [a]_n \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$

模 n 同余类构成的集合是一个重要的概念, 有许多记法, 例如 $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 等. 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\}$. 对于正整数 n , 我们记扩展的加法为:

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n.$$

易证 \mathbb{Z}_n 在扩展加法下构成一个群. 类似地, 扩展乘法为:

$$[a]_n \times [b]_n := [a \times b]_n.$$

现在令 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m, n) = 1\}$. 证明: \mathbb{Z}_n^* 在扩展乘法下构成一个群.

Problem 8

对没有单位元的半群 M , 是否一定能在其中加入一个新元素 e 使得 $M \cup \{e\}$ 是含有单位元 e 的半群?

Problem 9

设 M 是有单位元 e 的半群, a, b 是 M 中的逆元. 试证: ab 也是 M 的逆元.

Problem 10

若群 G 只有一个元素 a 是二阶元素，即满足 $a^2 = e$ ，则 a 与群 G 中任意元素都可交换，即 $ab = ba, \forall b \in G$.

Problem 11

设 $G = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$, i 为虚数单位. 验证 G 关于复数加法构成群.

Problem 12

试用数学归纳法证明：若群 G 是交换群，则 $(ab)^n = a^n b^n, \forall a, b \in G, n \in \mathbb{N}$.